ETUDE DE SERIES CONTINUES

par Monique Nahas et
Hervé Huitric

Dans cet article, nous présentons le cadre formel de notre travail actuel sur la couleur. Il ne s'agit pas d'une théorie de la couleur, mais simplement d'un système de référence qui a l'avantage d'être explicitable, résoluble facilement et suffisamment riche pour permettre une grande diversité.

Le point de départ de ce système a été de faire abstraction de la composition et de s'intéresser à des familles colorées formées par addition optique à partir de composants élémentaires (c'est ce que l'on appelle "les éléments atomiques"). On a même fait en premier lieu abstraction de la notion de teinte, et on s'est intéressé aux familles de couleurs qui donnent par addition optique le même gris (on réintroduit le facteur teinte ultérieurement). Ce gris est caractérisé par un paramètre, son "facteur de diffusion" ou "luminance" qui représente le pourcentage du flux lumineux qu'il réfléchit.

Une fois choisi un certain nombre de couleurs de base, les éléments atomiques à partir desquels on composera les familles sont caractérisés par les pourcentages de ces couleurs. La seule contrainte est que ces éléments possèdent la luminance désirée. (Bien entendu l'expression "couleur de base" ne signifie pas que ces couleurs ont un caractère intrinsèque plus fondamental que d'autres. Elle signifie simplement qu'on les a choisies comme ingrédient de fabrication. En principe, la richesse du modèle ne dépend pas des couleurs choisies, mais plutôt du nombre de ces couleurs. Ce n'est pas tout à fait vrai dans les réalisations pratiques usuelles où l'addition optique ne peut pas être parfaite).

Les éléments atomiques peuvent être réalisés de différentes façons qui interviennent bien évidemment sur le caractère de leur composition ultérieure. Avant d'entrer dans la description précise du modèle, donnons une description rapide des modes de réalisation choisis :

- Dans une première série de travaux, les éléments atomiques sont des surfaces données sur lesquelles sont répartis aléatoirement des points colorés, de façon à respecter les pourcentages de couleurs et obtenir une bonne addition optique. Cette répartition est déterminée par un programme. Les "points" sont des petits carrés peints directement suivant les instructions de l'ordinateur.

- Les points sont remplacés par des lignes.
- Dans un dernier type de travaux, ces éléments sont réalisés sur des cartes perforées. Cette dernière partie est la plus complexe du fait de l'introduction de nombreux paramètres supplémentaires (rapport fond/carte perforée). Nous ne nous occuperons pas, dans cet article, de la troisième partie.

1 - DETERMINATION DES ENSEMBLES COLORES DE MEME LUMINANCE

- On fait l'hypothèse suivante, assez bien vérifiée en pratique : les luminances s'ajoutent proportionnellement aux pourcentages des couleurs correspondantes (1). En d'autres termes, la luminance d'une surface formée par exemple de trois couleurs A, B, C, dont les luminances spécifiques sont respectivement $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$, et dont les pourcentages dans la surface sont respectivement x_A, x_B, x_C, est donnée par :

$$\lambda = x_A.\lambda_A + x_B.\lambda_B + x_C.\lambda_C$$

Cette hypothèse sera d'autant plus vérifiée que l'on est dans de meilleures conditions d'addition optique : c'est ce qui justifie le choix de nos réalisations, en particulier de la première.

- Considérons un ensemble de n couleurs réparties sur une surface donnée, et appelons x_1 le pourcentage de la couleur 1, et λ_1 la luminance de la couleur 1. Les éléments atomiques que nous cherchons à déterminer sont caractérisés par les valeurs de ces pourcentages x_1. Si l'on souhaite que la luminance de l'ensemble soit une certaine valeur λ , les pourcentages désirés sont les solutions des équations suivantes :

(1) Et que l'on peut justifier en admettant que l'on travaille à éclairement constant : les flux lumineux qui s'ajoutent entre eux sont alors proportionnels aux surfaces diffusantes.

(1) $$\sum_{i=1}^{n} x_i.\lambda_i = \lambda$$

(2) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

(3i) $$0 \leqslant x_1 \leqslant 1$$

L'équation (1) exprime l'hypothèse d'additivité des luminances proportionnellement aux surfaces.
Les équations (2) et (3i) sont nécessaires (et suffisantes) pour assurer que les nombres x_i calculés à partir de (1) peuvent s'interpréter comme des pourcentages;

- Une solution de ce système est formée par l'ensemble de n pourcentages (x_1, x_2,...,x_n) que l'on peut représenter par un point de l'espace vectoriel R^n. D'après les équations (1) et (2), l'ensemble des solutions est une variété linéaire de dimension n-2 dans R^n (c'est-à-dire qu'on peut la décrire au moyen de n-2 paramètres) et d'après les inéquations (3i), c'est aussi l'intersection de cette variété avec un cube unité de R^n. En général, une telle intersection n'existe pas toujours, cela dépend des valeurs choisies pour λ_i et λ.

- *Exemples*

  Si l'on prend seulement deux couleurs, les équations (1) et (2) déterminent un point (x_1,x_2) de R^2 (variété de dimension 0). Il n'y a de solution pour (3i) que si λ est compris entre les deux luminances λ_1 et λ_2.

  Dès que le nombre de couleurs est supérieur à deux, il y a des ensembles continus de solutions possibles. Le cas de trois couleurs a l'avantage de bien se représenter géométriquement : une solution (x_1,x_2,x_3) est un point de l'espace vectoriel usuel R^3.Les équations (1)et(2) déterminent dans ce cas une droite et l'ensemble des solutions, s'il existe, est le segment de cette droite contenu dans le cube construit sur (0,1).

- *Résolution générale*

  Elle est assurée par un programme général (J.Ridard, B.Lévy) pourvu que l'on soit dans les conditions d'existence des solutions. En fait, celles-ci sont

assurées dès que :

$$\min_i \lambda_i < \max_i \lambda_i$$

L'ensemble des solutions se présente sous la forme suivante :

$$
\begin{array}{lllll}
m_1 & \leqslant & x_1 & \leqslant & M_1 \\
m_2(x_1) & \leqslant & x_2 & \leqslant & M_2(x_1) \\
m_3(x_1,x_2) & \leqslant & x_3 & \leqslant & M_3(x_1,x_2) \\
\vdots & & & & \\
m_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-3}) & \leqslant & x_{n-2} & \leqslant & M_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-3})
\end{array}
$$

Pour les deux dernières couleurs, x_{n-1} et x_n sont calculés à partir des équations (1) et (2) en fonction des x_k, $k = 1,\ldots,n-2$.

Les pourcentages x_k peuvent donc être choisis arbitrairement à l'intérieur de deux bornes, une borne inférieure m_k et une borne supérieure M_k calculées par le programme. Ces bornes dépendent des choix des pourcentages x_i – $i = 1,\ldots,k-1$. On voit donc que l'ordre de résolution du système (le choix des couleurs numéro 1, 2, etc..) constitue un degré de liberté pour le modèle.

II - LE MODELE

On a choisi 6 "couleurs" : rouge, jaune, bleu, vert, blanc et noir. Le choix des luminances correspondantes se fait suivant une échelle logarithmique comme cela est expliqué dans la référence (1).

Luminance des couleurs saturées :

Blanc	:	95
Jaune	:	50
Rouge	:	30
Vert	:	20
Bleu	:	15
Noir	:	5

Le système aura donc des solutions dès que :

$$5 \leqslant \lambda \leqslant 95$$

Les propriétés de continuité

Une solution $(x_1,\ldots,x_n)$ caractérise donc un élément de base. Comment assembler ces éléments ? Dans un premier type de travaux, on a choisi essentiellement de jouer sur des propriétés de continuité (ce qui est rendu possible par la structure de l'ensemble des solutions). Plus précisément, on part de la constatation naïve que l'impression produite par deux éléments de base est d'autant plus semblable que les différences entre les pourcentages correspondants sont plus faibles : cette "impression" est une fonction continue des pourcentages x_1, $x_2,\ldots,$ x_n (1).

Distance entre les éléments

On peut introduire une notion de distance entre deux éléments de base, ce qui permet de parler de façon précise d'éléments de base proches ou lointains.

La distance la plus classique entre deux éléments A et B caractérisés par les pourcentages $(x_1^A, \ldots , x_n^A)$ et $(x_1^B, \ldots , x_n^B)$ est donnée par :

$$d = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i^A - x_i^B)^2\right]^{1/2}$$

Deux éléments seront voisins si leur distance est inférieure à une quantité choisie : en pratique, par exemple, $d \leqslant 10\ \%$ assure une très bonne proximité ; on peut aller en fait beaucoup plus loin.

D'un point de vue moins mathématique, on peut s'attendre à ce qu'une variation, même légère, de blanc, ne joue pas le même rôle qu'une variation identique de noir. Dans une petite perturbation, l'impression produite dépend en fait de la luminance de l'ensemble perturbé et des luminances des couleurs qui varient. Pour en tenir compte, la distance entre deux éléments doit comprendre des fonctions $\Phi_i(\lambda) > 0$:

$$d = \left[\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\lambda)(x_i^A - x_i^B)^2\right]^{1/2}$$

(1) Notons que la perception est également une fonction continue de λ, ce qui s'observe dans les dégradés d'une teinte donnée, mais on ne s'intéresse ici qu'à des variations à luminance constante.

Bien que cette distance soit "équivalente" à la précédente (1), elle peut permettre de définir des voisinages plus réguliers pour l'impression visuelle.

Séries continues

Principe : on assemble les éléments atomiques en suivant un chemin (2) dans la variété des solutions. Les éléments atomiques sont des points sur ce chemin, chacun étant choisi dans un voisinage du point précédent (c'est-à-dire à une distance du précédent inférieure à une certaine distance donnée). Si ces éléments sont disposés suivant une ligne, on obtient un passage continu du premier élément au dernier (analogue à ce qui se passe dans le cas d'un dégradé, mais ici il s'agit de transformation à luminance constante). Cette ligne pourra être ensuite déformée de différentes façons : dans une série de travaux, les éléments sont assemblés suivant une spirale, dans d'autres, suivant une structure en zigzag. On donne ainsi une impression de mouvement.

On voit qu'on dispose d'une infinité de manières pour construire ce chemin. Une façon simple est de l'associer au mouvement d'une couleur déterminée, comme c'est le cas dans l'exemple suivant : si la luminance globale est fixée à $\lambda = 30$, on voit que le domaine de variation possible pour le rouge est le plus large possible : tous les pourcentages entre 0 et 1 sont autorisés. On choisit l'ordre de résolution du système de telle sorte que la couleur numéro 1 soit le rouge.

Pour les autres couleurs, on choisit la valeur moyenne, à savoir :

$$x_j = \frac{m_j + M_j}{2}$$

(1) Toutes les distances sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe des nombres a et A positifs tels que :

$$a d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant A d_1(x,y) \qquad \forall\ x,y \in \mathbb{R}^n$$

(2) C'est-à-dire que tous les pourcentages x_i dépendent d'un même paramètre pouvant varier continuement. Dans la suite, on choisit comme paramètre un pourcentage donné, mais on pourrait faire un autre choix et, par exemple, introduire un paramètre qui représenterait le temps.

(les deux dernières couleurs sont toujours déterminées). Bien que ce choix dépende de l'ordre de résolution pour les couleurs, il assure une contribution assez homogène (ni très grande, ni très petite) de toutes les couleurs. On décrit le chemin en faisant progresser le rouge de 0 % à 100 % par pas réguliers, par exemple de 5 %. On obtient ainsi un passage continu à luminance constante, d'un état purement rouge à un état ne contenant aucun rouge. Les séries continues sont toutes construites selon ce principe.

Variations continues dans le plan

Au lieu de faire une variation continue suivant un chemin, on peut faire une variation continue dans le plan (et, de la même manière, dans l'espace ou dans le plan et le temps). De la même façon que sur le chemin, chaque point (c'est-à-dire chaque élément atomique solution) est "voisin" des deux points qui l'entourent, on peut demander que les éléments de base soient répartis dans un plan de telle sorte que chaque élément soit voisin de tous ceux qui l'entourent.

Pour préciser, soient (x,y) les coordonnées d'un point de repère d'un élément atomique ; on demande que les éléments qui l'entourent (les 8 éléments suivants : x±1, y±1),(x±1,y),(x,y±1)) soient optiquement voisins. On a choisi un modèle simple où l'on fait varier deux couleurs suivant les deux axes du plan, les autres couleurs sont toujours déterminées par leur valeur moyenne.

Notons qu'il est possible de réaliser des séries continues ou des variations continues dans le plan où la luminance, bien que constante dans certaines zones, puisse avoir certaines variations. Dans ce cas, deux éléments seront dits optiquement voisins si la distance suivante :

$$d = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i^A - x_i^B)^2 + (\lambda_A - \lambda_B)^2 \right]^{1/2}$$

est plus petite qu'une certaine valeur d_o déterminée en fonction de la proximité désirée.

III - LA NOTION DE TEINTE

Jusqu'à présent on a fait en principe abstraction de la notion de teinte ; celle ci se réintroduit cependant dans le choix de variations continues où progresse une couleur : on peut passer continuement d'une teinte à une autre, à luminance constante.Dans le cas de variations dans le plan on passe continuement d'une zone du plan de teinte déterminée à une autre zone également de teinte déterminée. On réintroduit ainsi la possibilité de contrastes plus ou moins distants.

L'introduction du facteur teinte dans notre modèle ne soulève pas de difficulté de principe : les éléments atomiques ont une teinte déterminée à partir de leurs quatre composantes colorées : le rouge, le vert, le bleu et le jaune. Chaque élément est donc associé à un point du cercle chromatique, ou à un vecteur Oi si O est le centre du cercle (à l'exclusion du blanc pur et du noir pur).

A ce sujet, on renvoie à l'article de J. Dupré (réf.1) où l'on trouvera la formulation d'une structure mathématique liée à ce cercle. Si l'on a des pourcentages x_i des couleurs i, la teinte du mélange est caractérisée par le point sur le cercle obtenu en faisant l'addition vectorielle des vecteurs $x_i.\overrightarrow{Oi}$ et en prenant l'intersection du vecteur obtenu avec le cercle.

Pour exprimer le résultat, introduisons un axe arbitraire sur le cercle chromatique $\overrightarrow{Ox}$.

La teinte de la couleur i est caractérisée par l'angle ϕ_i de $\overrightarrow{Oi}$ avec $\overrightarrow{Ox}$.

Alors la teinte de l'élément atomique comprenant x_i % de la couleur de teinte i (et quels que soient les pourcentages du noir et du blanc qui le composent) correspond à l'angle ϕ donné par :

$$\cos \phi = \sum_{i=1}^{4} x_i.\cos\phi_i \; / \; (\sum_i x_i^2 + \sum_{i\neq j} x_i x_j \cos(\phi_j - \phi_i))^{1/2}$$

(1)

$$\sin \phi = \sum x_i.\sin \phi_i \; / \; (\sum_i x_i^2 + \sum_{i\neq j} x_i x_j \cos(\phi_j - \phi_i))^{1/2}$$

Le plus simple est alors de choisir 4 couleurs 2 à 2 complémentaires et, si possible, à angle droit sur le cercle ; on obtient facilement la teinte du mélange correspondant.

Réciproquement, à une teinte déterminée correspond toute une famille d'éléments atomiques de même luminance (qui n'est jamais vide). Il est donc possible de calculer des sous-ensembles de teinte et de luminance données. La caractérisation des classes d'éléments de même teinte se fait à partir des équations (1). En particulier, on peut déterminer les éléments de la classe correspondant à une teinte complémentaire d'une teinte donnée ($\phi - \Pi + \phi$). (On peut se demander à ce sujet s'il est possible de "relever" la notion de complémentaire de façon convenable, c'est-à-dire d'associer à un élément atomique donné un complémentaire bien défini et non plus une classe. Cela ne semble pas possible d'une manière naturelle en restant dans le cadre d'une luminance constante).

Revenons aux séries continues : on voit à partir des relations (1) que des éléments atomiques de luminance donnée, voisins au sens explicité au paragraphe 2, sont également voisins en teinte. Une série continue correspond donc aussi à un passage continu de teintes. Réciproquement, si on se donne deux teintes, il existe toujours un chemin continu pour passer de l'une à l'autre à luminance constante, et de même des passages continus dans le plan.

(1) Jacques DUPRE : "Une formalisation des couleurs" in *Artinfø/Musinfø* n°12 et 13.